

网络外部性下简单多数投票的均衡分析^{*}

叶昊洋 黄婧扬 石凡奇

摘 要：现实中投票往往存在参与成本，且个体的投票决策不仅取决于自身利益，也受到社会网络中其他人的影响。本文在一般的投票成本与相依价值模型框架下，研究简单多数投票的均衡特征。首先，我们证明了投票博弈均衡的存在性，并进一步刻画了所有均衡所遵循的二阈值策略结构。其次，在线性网络外部性与期望收益对称性的假设下，我们考察了网络结构对投票均衡的影响机制。理论分析表明：当社会网络为非正则图结构时，投票博弈仅存在非对称均衡；相对应地，在正则图结构的社会网络中，对称均衡一定存在，且当网络外部性较弱时，该均衡具有唯一性。数值模拟结果进一步表明：选民的投票参与度（即选择投票而非弃权的概率）会随着网络外部性强度的增加或网络连接程度的增强而下降。

关键词：网络外部性 简单多数投票 投票成本 二阈值策略 对称均衡

中图分类号：F016 **JEL 分类号：**D72 D82 D85

一、引 言

集体决策是现代社会治理的重要机制，投票则是实现集体决策的基础性制度安排。在多种投票规则中，简单多数制（simple majority voting）因其程序简洁、操作透明，被广泛应用于公共治理、公司治理及各类民主实践中。例如，在美国或欧洲国家，居民社区的公共事务、学校董事会的预算安排乃至地方议案的通过，常常依赖简单多数规则决定（Matsusaka, 2005；Gerber 和 Lewis, 2004）。在中国，随着全过程人民民主理念的不断推进，投票亦逐渐成为基层治理中的常规决策方式。无论是在城市社区的业主大会上决定公共维修资金用途，还是在农村村民会议中表决基础设施项目建设方案，简单多数投票都被广泛采用，成为民主协商和集体决策的有效制度工具。

党的二十大报告明确提出，“全过程人民民主是最广泛、最真实、最管用的社会主义民主”，强调要拓宽群众有序政治参与渠道，完善基层民主制度，提升群众在公共事务决策中的实际影响力。在此背景下，研究投票规则的作用机制与实际效果，不仅有助于深化对民主决策过程的理解，也为优化我国民主制度设计、提升基层治理能力提供重要理论支撑。

尽管已有文献广泛研究了投票中的理性弃权、投票激励与信息聚合等问题（Feddersen 和 Sandroni, 2006；Börger, 2004），但大多数分析均假设选民效用彼此独立，忽略了

^{*} 叶昊洋，北京大学计算机学院，E-mail: 2501112105@stu.pku.edu.cn；黄婧扬，北京大学数学科学学院，E-mail: 250110044@stu.pku.edu.cn；石凡奇（通信作者），北京大学经济学院，E-mail: ericshi@pku.edu.cn。本文得到国家自然科学基金青年项目“不对称信息下社会网络干预的机制设计”（项目编号：72303011）以及北京大学经济学院种子基金的资助。作者感谢匿名审稿人提出的宝贵意见与建议，文责自负。

现实中广泛存在的网络外部性。具体而言,在许多集体决策场景中,个体对某项提案的评价不仅取决于自身的判断,还会受到其邻居或朋友态度的直接影响,尤其是在有稳定关系与频繁互动的社会网络中更为突出。这类网络外部性广泛存在于中国基层治理结构之中。无论是在农村村庄中村民对基础设施项目或集体经济事务的表决,还是在小城镇或老旧小区居民就物业治理和社区公共事务做出的投票决策中,个体往往是长期交往的朋友、亲戚或邻里关系,其投票行为不仅体现个人偏好,更体现对他人福祉的考量。正是因为这类社会网络的密切性和持久性,个体对于他人的效用有明确而稳定的关心,从而形成系统性的网络外部性。

本文旨在填补这一理论空白,建立一个包含投票成本与网络外部性的简单多数投票博弈模型,显式引入选民间的网络结构,研究在这一更贴近现实的设定下投票均衡的存在性、结构特征及其对网络形态的依赖性。我们的分析不仅丰富了投票博弈理论框架,也为理解中国特有的“熟人社会”与社区民主实践提供了制度设计和机制评估的理论依据。

本文的理论分析主要包含三个部分。首先,我们在简单多数投票博弈模型中同时引入投票成本和效用的相依性结构(interdependent values),考察此一般化设定下均衡的存在性与结构特征。我们证明,在任意异质的投票成本与相依偏好的情形下,投票博弈始终存在贝叶斯纳什均衡,且所有均衡均具有明确的“二阈值策略”(two-cutoff strategy)结构,即每位选民采用两个内在收益阈值分别区分“反对—弃权—支持”三个行动区间。^①

其次,在上述一般模型的基础上,我们进一步引入网络外部性与线性收益结构,并在期望对称性的假设下分析网络结构对投票均衡的影响。研究发现,此时投票博弈的均衡性质显著取决于网络结构是否为正则图(regular graph)。若网络为非正则图,则均衡必定非对称;相反,若网络为正则图,则必然存在对称均衡,且该对称均衡仅依赖于选民共同度数 d ,与具体网络结构无关。当网络外部性强度较小或适中时,对称均衡唯一。该结果的核心机制在于,即便选民在事前认为他人的内在收益期望为零,但在其投票成为关键票的情形下,其他人在期望上表现为整体倾向与自己相反的立场。由于存在网络外部性,选民会在决策中部分内化这种因自身投票所引发的负外部性,而内化程度取决于其度数 d_i 及外部性强度 γ 。当网络为正则图时,所有选民面临完全相同的内化激励,因此可以构成对称均衡;而在非正则图中,不同度数带来的边际激励不同,导致无法同时满足所有人的最优反应条件,从而排除了对称均衡的可能性。此外,随着网络外部性强度 γ 增强或选民共同度数 d 提高,个体内化投票负外部性的激励增强,投票的边际收益下降,从而使得选民在均衡中更倾向于弃权,整体参与率下降。

最后,本文借助数值模拟对不同网络结构下的非对称均衡进行了更深入的分析。模拟结果显示,即使在选民度数完全相同的不同正则图网络中,非对称均衡的具体阈值结构仍然可能存在显著差异。这表明非对称均衡不仅受到选民度数的影响,也直接依赖于网络拓扑的具体结构。因此,网络结构的差异不仅影响均衡的对称性,也对非对称均衡的具体表现具有重要作用。这为我们理解现实中社会网络如何影响集体决策行为的异质

① 在部分参数设定下,两个阈值可能与内在收益的端点重合,或彼此重合,从而使三个行动区间退化成为两个或一个,但策略结构仍属于二阈值策略。

性提供了新的理论视角。

本文的研究在理论与实践两个层面均具有重要意义。从理论上讲，本文将网络外部性显式引入标准的带投票成本的简单多数投票模型中，刻画出社会网络结构如何深刻影响投票均衡的存在性、对称性与选民行为。这一扩展不仅填补了现有文献在“相互关心型”偏好结构下投票行为分析的空白，也为后续研究网络嵌入式决策机制提供了可操作的建模框架。从实践和政策角度看，本文的分析对于理解和完善我国基层治理中的民主决策机制具有直接启示意义。在乡村振兴、社区共治、业主大会、村民议事会等日益广泛开展的基层参与制度中，投票往往是达成集体共识的重要手段。但在熟人社会中，选民之间广泛存在社会交往、长期互动和情感联系，决策往往不仅基于自身利益，更受到他人福祉的影响。本文通过构建具备网络外部性的投票模型，为这类“有温度的投票行为”提供了理论解释。同时，本文揭示了网络结构和社会联结强度对投票参与率和集体决策效率的影响，有助于政策制定者在设计村民投票、社区协商、议题表决等制度时，更好地因地制宜、分类施策，从而推动全过程人民民主在基层落地见效。

二、文献综述

本文将网络外部性（network externalities，Farrell 和 Saloner，1985；Katz 和 Shapiro，1985）引入带有投票成本的策略性投票模型（Börger，2004），以更为深入地分析相依价值（interdependent values）情形下的投票行为（Gershkov 等，2023），并着重揭示网络结构在集体决策中对投票均衡及效率的影响。

策略性投票模型的研究由 Palfrey 和 Rosenthal（1983）开创。Feddersen 和 Pesendorfer（1996；1997）在无投票成本的情形下，证明即使选民对结果具有共同价值并且拥有私人信息，简单多数投票也能够有效地实现信息聚合（information aggregation）。而在引入正的投票成本之后，Börger（2004）以及 Ghosal 和 Lockwood（2009）指出了成本节约与有效信息聚合之间存在的固有权衡，证明了简单多数投票往往难以实现完全有效的结果。Grüner 和 Tröger（2019）则进一步探讨了如何在此框架下设计最优机制，以实现更好的社会效率。上述经典文献大多关注的是纯私人价值（private values）或共同价值（common values）下的投票决策，尚未考虑选民效用之间可能存在的直接相互影响。本文则显式引入网络外部性，使个体效用直接取决于邻居或朋友的效用，从而在更一般的相依价值框架下分析投票均衡的结构特征与效率性质。我们发现，在网络外部性存在时，网络结构对投票行为和均衡结果的影响十分显著。具体而言，随着网络外部性强度的增加或选民邻居数量的提高，选民更倾向于内化自身投票行为对邻居效用的外部性，从而系统性地改变投票参与的边际激励。

目前关于相依价值与网络外部性的研究，更多集中于产品定价（Farrell 和 Saloner，1985；Katz 和 Shapiro，1985；Fainmesser 和 Galeotti，2016）以及机制设计问题（Jehiel 和 Moldovanu，2001），鲜有文献将网络外部性明确引入策略性投票模型的研究框架。已有的少数几个例外包括 Dasgupta 等（2008）和 Gershkov 等（2023）。Dasgupta 等（2008）主要对同时投票与序贯投票的均衡结果进行实证比较，Gershkov 等（2023）则从理论上分析相依价值情形下投票的孔多塞胜者（Condorcet winner）。本文与 Gershkov 等（2023）的主要区别在于：首先，我们显式引入投票成本与选民的弃权选项，这一设定不仅更贴合现实，还能够确保均衡策略结构的严谨性（具体表现为“二阈值策略”结构）；其次，

我们进一步引入网络结构，并假设选民的外部性效用会随其邻居数量线性增加（而非采取加权平均），这能够更准确地刻画现实社会网络中的偏好关联模式，揭示网络结构对投票均衡产生的关键作用。

在具体分析方法上，本文借鉴了 Milgrom 和 Weber（1985）以及 Reny（1999）的经典结论与方法论，从而严格证明了本文所研究的投票博弈存在贝叶斯纳什均衡，并在一定条件下证明了对称均衡的存在性。

三、模型设定

考虑一个包含 $m \geq 3$ 名选民的群体，对一项单一提案进行投票决策。每名选民可以选择支持（Y）、反对（N）或弃权（A）三种行动之一。选择参与投票（即支持或反对）会给选民 i 带来严格正的成本 $c_i > 0$ ，而选择弃权则不产生成本。投票本身不带来直接收益，所有潜在收益完全取决于投票的最终结果。具体地，我们将提案未通过时选民的收益标准化为 0；若提案通过，选民 i 的收益为 $u_i(v_i, v_{-i})$ ，其中 v_i 为选民自身的内在收益（可正可负），而 v_{-i} 为其他选民的内在收益向量（可正可负）。我们假定收益函数 $u_i(\cdot)$ 对 v_i 和 v_{-i} 连续，且关于 v_i 严格递增。选民 i 的内在收益 v_i 为其私人信息。所有选民对投票成本 c_i 、收益函数 $u_i(\cdot)$ 以及内在收益 v_i 的分布具备共同知识。具体地，假设 v_i 相互独立，且在区间 $[\underline{v}_i, \bar{v}_i]$ 上服从一个无原子的绝对连续分布函数 $F_i(\cdot)$ ，其中分布区间满足 $-\infty < \underline{v}_i < \bar{v}_i < \infty$ 。选民的偏好结构为拟线性形式，即投票成本 c_i 线性地影响效用，每位选民以最大化期望效用为决策目标。

注 1（普适性的模型设定）：本文对模型设定保持尽可能的一般性，具体体现在允许选民间存在异质性，投票成本 c_i 、收益函数 $u_i(\cdot)$ 及内在收益分布 F_i 均可因选民而异。我们在第四部分证明，此类异质性不影响均衡存在性与均衡策略的二阈值结构。在具体分析均衡时，再引入对称性假设与收益函数 $u_i(\cdot)$ 对选民网络 G 的具体依赖形式。

（一）投票规则

本文采用简单多数投票规则。定义每位选民的行动空间为 $B_i = B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ，分别对应支持（Y）、反对（N）和弃权（A）。^① 给定选民行动向量 $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ ，行动到投票结果（通过 Pass 或不通过 Fail）的映射定义为：

$$\Phi(b) = \begin{cases} \text{Pass}, & \text{若 } \sum_{i=1}^m b_{i1} > \sum_{i=1}^m b_{i2} \\ \text{Fail}, & \text{若 } \sum_{i=1}^m b_{i1} < \sum_{i=1}^m b_{i2} \\ \frac{1}{2}\text{Pass} + \frac{1}{2}\text{Fail}, & \text{若 } \sum_{i=1}^m b_{i1} = \sum_{i=1}^m b_{i2} \end{cases}$$

（二）博弈时间结构

投票博弈的具体展开过程如下：第一，每位选民的内在收益 v_i 独立地从分布 F_i 中实现，并由选民 i 私人观察到；第二，在观察到自身内在收益 v_i ，并已知共同信息（即所有 v_j 的分布 F_j 以及相互独立性）的前提下，所有选民同时独立地选择各自行动（可采用

^① 为避免符号混淆，本文使用 B （而非 A ）表示选民的行动空间。

混合策略)；第三，根据所有选民行动的组合 b ，通过规则 $\Phi(\cdot)$ 确定投票结果，每位选民据此获得相应效用。

(三) 均衡定义

鉴于该投票博弈涉及私人信息与同时行动，本文采用的解概念为贝叶斯纳什均衡 (Bayesian Nash Equilibrium, BNE)。

四、均衡结构：二阈值策略

本部分证明上述投票博弈始终存在贝叶斯纳什均衡，并进一步表明：在任意一个均衡中，每位选民都采取二阈值策略。

在允许混合策略的情形下，选民 i 的策略可表示为内在收益到行动概率分布的映射：

$$\sigma_i: [v_i, \bar{v}_i] \rightarrow \Delta(B)$$

为了便于分析，我们定义策略结构如下所示。

定义 1 (二阈值策略)：对选民 i ，如果存在阈值 $v_i^N \leq v_i^Y \leq \bar{v}_i$ ，使得其策略满足以下条件，

$$\sigma_i(v_i) = \begin{cases} (1, 0, 0), & \text{若 } v_i > v_i^Y \\ (0, 1, 0), & \text{若 } v_i < v_i^N \\ (0, 0, 1), & \text{若 } v_i^N < v_i < v_i^Y \end{cases}$$

则称选民 i 采用二阈值策略。

直观而言，在二阈值策略下，选民根据自身内在收益 v_i 与两个阈值 v_i^N 和 v_i^Y 的比较来决定行动：当 v_i 足够高 ($v_i > v_i^Y$) 时，选民支持提案；当 v_i 足够低 ($v_i < v_i^N$) 时，选民反对提案；而内在收益介于两阈值之间时，选民则选择弃权以节省投票成本。

在上述定义基础上，我们给出重要结论如下所示。

定理 1 (均衡存在性与二阈值结构)：对于前文定义的投票博弈，必存在贝叶斯纳什均衡。进一步地，在任意一个均衡中，每位选民均采用二阈值策略。

定理 1 的重要贡献在于：一方面确保了均衡的存在性，另一方面对任意均衡的策略形式给出了统一刻画。值得特别强调的是，均衡策略的二阈值结构具有普适性，不依赖于投票成本 c_i 、收益函数 $u_i(\cdot)$ 和内在收益分布 F_i 的具体异质性（但阈值的具体取值会受到这些变量的影响）。

从直观上看，由于各选民内在收益相互独立，任何选民无法仅凭自身内在收益 v_i 推断其他选民内在收益 v_{-i} 的信息。^① 在简单多数投票规则下，支持提案导致通过的概率不低于弃权，不低于反对提案；结合收益函数 $u_i(\cdot)$ 对 v_i 严格递增，当 v_i 增加时，选民的最优决策经历从反对、弃权到支持的单调变化过程。同时，严格正的投票成本 $c_i > 0$ 保证了均衡中不存在被占优的行动。

事实上，定理 1 的证明同时指出：对于每位选民，给定其他选民的任意策略组合，其最优反应必为二阈值策略。换言之，任何非二阈值策略都非最优反应，因此属于严格被占优策略（参见 Osborne 和 Rubinstein (1994) 中的引理 60.1^②）。

① 若 v_i 与 v_{-i} 之间存在强相关性，则定理 1 的结论可能不再成立。

② 虽然该引理原针对有限博弈提出，但证明逻辑可自然推广至本文的情形。

注 2（特殊情形下的阈值策略）：需要指出的是，我们对二阈值策略的定义允许出现退化情形，即存在 $v_i = v_i^N$ 、 $v_i^Y = \bar{v}_i$ 或 $v_i^N = v_i^Y$ ，此时在均衡中选民投支持票、反对票或选择弃权的概率均可能为 0。例如，若 $\min_i v_i \geq 0$ 、 $c_1 < \frac{\bar{v}_1}{2}$ 且 $u_i(v) \geq v_i$ ，则存在如下均衡：选民 1 始终支持提案 ($\sigma_1(v_1) = (1, 0, 0)$)，而其余所有选民始终选择弃权（对任意 $j \neq 1$ ， $\sigma_j(v_j) = (0, 0, 1)$ ）。

五、期望对称博弈的均衡

本部分在模型设定的基础上，引入特定的收益函数形式与对称性假设，进一步刻画一种重要的特殊情形——期望对称（conditional symmetric）投票博弈下的均衡结构。

为了明确分析网络外部性的影响，我们首先引入一个无向网络结构 G 。其中 $g_{ij} = 1$ 表示选民 i 与 j 之间存在直接连接（邻居关系），否则 $g_{ij} = 0$ 。根据网络经济学文献的惯例（Jackson, 2008），定义 $N(i) = \{j: g_{ij} = 1\}$ 表示与选民 i 直接相连的邻居集合， $d_i = |N(i)|$ 表示选民 i 的网络度数（即邻居的数量）。在本文的分析中，假定网络结构 G 为所有选民的共同知识。

为展开后续分析，我们做出如下具体假设。

假设 1（网络外部性下的线性收益）：给定网络结构 G ，选民 i 的收益函数具有如下线性结构，

$$u_i(v) = v_i + \gamma \sum_{j \in N(i)} v_j$$

其中参数 $\gamma > 0$ 代表网络外部性强度。

假设 1 意味着，每位选民的收益取决于自身内在收益及邻居内在收益的线性组合。为明确凸显网络外部性，选民的收益随邻居内在收益的简单总和增加而单调增加（或减少），而非采用邻居内在收益的平均值。给定投票成本，这一设定有别于 Gershkov 等（2023）。

假设 2（同质的投票成本与内在收益分布）：所有选民的投票成本与内在收益的分布完全相同。即对任意选民 i ，满足①：

$$c_i = c, F_i(\cdot) = F(\cdot)$$

假设 3（期望对称收益分布）：选民内在收益 v_i 关于零点对称，即对任意内在收益 v ，收益的分布函数满足②：

$$F(v) + F(-v) = 1$$

假设 2 指出，在事前（ex-ante）意义上，选民之间的异质性仅源于他们在网络结构 G 中所处的位置。假设 3 进一步强化了期望意义上的对称性，确保所有选民从期望意义上认为其他选民的内在收益相等（均为 0）。

假设 4（有效投票成本）：投票成本满足 $c < \frac{\bar{v}}{2}$ 。

① 此处的同质分布 $F(\cdot)$ 意味着所有选民的内在收益取值区间相同，即 $v_i = \underline{v}$ 且 $\bar{v}_i = \bar{v}$ 。

② 该假设显然要求收益区间满足 $\underline{v} + \bar{v} = 0$ 。

若 $c > \frac{\bar{v}}{2}$, 则“始终放弃投票”为所有选民的严格占优策略, 此时投票博弈的唯一均衡即所有选民一致弃权。假设 4 排除了这一情形, 以保证本文所分析的投票均衡问题具有实际意义。

给定假设 1—4, 所有选民在相同内在收益 v 下的期望效用均相等, 即对于任意选民 i, j , 满足 $\mathbb{E}[u_i(v, v_{-i}) | v] = \mathbb{E}[u_j(v, v_{-j}) | v]$ 。^① 直观上, 一个自然的猜测是此时投票博弈应始终存在对称均衡。然而, 这一猜测并不成立。为了准确刻画对称性对均衡结构的影响, 我们首先给出以下定义。

定义 2 (对称 (二阈值) 均衡): 给定二阈值均衡 $(v_i^N, v_i^Y)_{i=1}^m$ ^②, 若对任意选民 i 均满足 $v_i^N = v^N$ 且 $v_i^Y = v^Y$, 则称该均衡为对称 (二阈值) 均衡。

直观而言, 在对称均衡中, 所有选民均使用相同的阈值。与之相对, 称任何不满足该条件的均衡为非对称均衡。

定义 3 (正则图): 若图 G 中所有节点的度数相同, 即对任意选民 i 满足 $d_i = d \in \mathbb{N}$, 则称图 G 为正则图。

下述定理精细刻画了网络结构对期望对称投票博弈均衡形式的影响。

定理 2 (期望对称投票博弈的均衡): 给定假设 1—4, 模型设定部分所定义的投票博弈均衡形式依赖于网络结构 G 是否为正则图。若 G 为非正则图, 则仅存在非对称均衡; 若 G 为正则图, 则必存在对称均衡。进一步地, 任意对称均衡满足 $v^Y = -v^N = v^* > 0$, 且给定共同度数 d , 该阈值 v^* 不依赖于 G 的具体网络结构。

定理 2 指出, 即使所有选民的期望效用相同, 多数网络结构下的投票博弈仍不具有对称均衡, 这一结论与私人价值模型 (Börger, 2004) 以及私人与共同价值线性组合模型 (Ghosal 和 Lockwood, 2009) 中的情况形成鲜明对比。仅当网络为正则图时, 才存在对称的均衡。在此情形下, 对称均衡具有两个关键特征: 第一, 选民用于区分反对与弃权的阈值 v^N 和用于区分弃权与支持的阈值 v^Y 互为相反数, 从而仅用单个正值 v^* 即可完全刻画; 第二, 该均衡阈值 v^* 的确定仅依赖共同度数 d , 而不取决于网络的具体结构。^③

深入理解定理 2 的关键在于以下两个观察: 第一个观察是, 在对称均衡中选民必然存在严格正的弃权概率。

引理 1 (对称均衡必为严格二阈值): 给定假设 1 与 2, 任何对称二阈值均衡 (v^N, v^Y) 均满足 $v^N < v^Y$ 。

尽管注 2 指出部分均衡中可能出现单阈值策略 (即无弃权), 但引理 1 表明此类情况在对称均衡中是不可能出现的。

第二个观察是, 尽管在事前意义上, 所有选民对其邻居内在收益的期望相等且均为 0, 但当某一选民的支持票成为关键票时, 其对邻居内在收益的条件期望将低于其反对票成为关键票时的条件期望。这是因为支持票成为关键票通常出现在“支持与反对票数相等”或“反对票比支持票多一票”的情形下, 此时其他选民更可能持反对立场; 而反对

① 注意到, 由于内在收益相互独立且服从关于零点对称的分布, 对于任意 i, j , 有 $\mathbb{E}[v_j | v_i] = 0$ 。

② 由定理 1 可知, 投票博弈中的任何均衡均可由二阈值策略完整刻画, 因此称之为二阈值均衡。

③ 即使给定共同度数, 网络结构仍可能存在差异。具体细节参见数值模拟分析部分。

票成为关键票则出现在“支持与反对票数相等”或“支持票比反对票多一票”的情形下，此时其他选民更可能持支持立场。给定网络外部性，选民会部分内化投票的外部性，从而倾向于降低投票概率。当 G 为非正则图时，必然存在度数不同的选民，使得投票激励在期望意义上出现差异，从而阻碍对称均衡的存在。相反，当 G 为正则图时，所有选民在期望意义上面对相同的投票激励，加之内在收益分布关于零对称，因此均衡阈值必然互为相反数，从而构成对称均衡。

注3：第一，均衡的唯一性。当网络外部性强度 $\gamma > 0$ 较小时，正则图的对称均衡具有唯一性。具体而言，考虑没有网络外部性的极端情形（ $\gamma = 0$ ），类似于 Börgers（2004）的分析可知，其他选民降低投票概率（即提高阈值 v^Y ）会提升选民 i 投票成为关键票的概率，从而增强其投票激励（降低 v^Y ）。由塔斯基不动点定理（Tarski's Fixed Point Theorem）可知，此时对称均衡阈值存在且唯一。由于收益函数连续，上述结果在网络外部性较小时（即 $\gamma > 0$ 较小时）仍成立。然而当 $\gamma > 0$ 较大时，选民投票决策中部分内化网络外部性的负向激励可能与仅关注自身内在收益的正向激励相冲突，最优反应不再单调，因而可能存在多个均衡。第二，投票效率。Börgers（2004）指出，当不存在网络外部性时，选民在对称均衡中投票概率高于社会最优。其原因在于：每个选民仅关注自身的内在收益，而忽略了自身投票行为降低其他选民投票成为关键票概率的影响。在本文考虑的网络外部性情形下，选民会部分内化上述影响。事实上，在对称均衡唯一的情形下，随着 γ 和 d 的增大，选民的均衡投票概率呈下降趋势（详见数值模拟部分）。然而，缺乏进一步假设时，均衡投票概率与社会最优之间的大小不定。

六、数值模拟

本部分通过数值模拟进一步验证和深化前文的理论结果。具体而言，本部分的目的有二：第一，验证理论分析的准确性；第二，更直观地展示非对称均衡的具体特征和经济含义。为实现上述目的，我们首先考察非正则图情形下的均衡，其次考察正则图情形下的均衡，最后对正则图中的对称均衡进行比较静态分析，考察网络外部性强度 γ 与选民共同度数 d 对投票参与率的影响。

为了保持分析的一致性，数值模拟中统一假设选民人数 $m = 6$ ，投票成本 $c = 0.15$ ，并聚焦于网络外部性强度 $\gamma < 1$ 的情形。^①

（一）非正则图的均衡

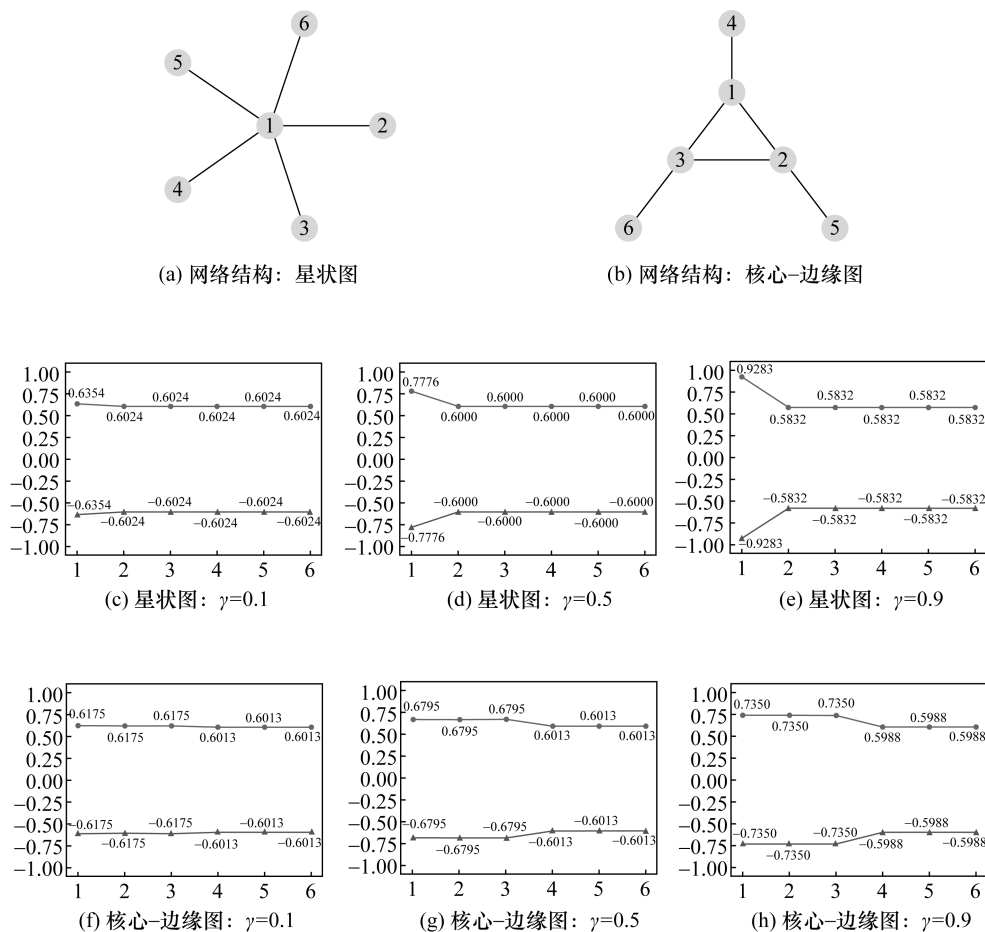
我们考虑两种典型的非正则图网络结构，并分析它们在不同网络外部性强度下的均衡特征。

例1（非正则图的均衡特征）：选民的内在收益 v_i 均服从 $[-1, 1]$ 上的均匀分布，网络外部性强度分别取 $\gamma = 0.1$ 、 0.5 与 0.9 ，具体考察如下两种非正则图结构：（a）星状

^① 从经济含义上看， $\gamma < 1$ 表示个体对自身效用的权重始终高于单个邻居对自身的影响，但若邻居数量较多，邻居的总体影响可超过个体自身内在收益的权重。在特定情形下，我们将适当讨论 $\gamma > 1$ 可能产生的新的经济学含义。

网络结构（如图 1（a）所示）^①；（b）核心—边缘网络结构（如图 1（b）所示）。

图 1 非正则图中的均衡



注：图 1 展示星状网络和核心—边缘网络在不同网络外部性强度下的投票均衡特征。其中，图 1（a）—（b）分别为星状网络与核心—边缘网络结构示意图；图 1（c）—（e）展示星状网络在不同网络外部性强度（ $\gamma=0.1, 0.5, 0.9$ ）下各选民的均衡阈值；图 1（f）—（h）展示核心—边缘网络在相应网络外部性强度下各选民的均衡阈值。图中圆点线条表示选民支持提案的阈值 v_i^Y ，三角线条表示选民反对提案的阈值 v_i^N ；横轴代表个体 1—6，纵轴代表阈值，后同。

图 1 直观地展示了星状网络（例 1（a））与核心—边缘网络（例 1（b））两种非正则图结构在不同网络外部性强度下的均衡结果。数值模拟表明：第一，正如理论推导（定理 2）所示，在上述两种非正则图结构中，不存在对称均衡，所有均衡均为非对称均衡。第二，度数较大的选民在均衡中倾向于以更低概率参与投票，即更高概率选择弃权。^② 第三，

① 星状网络是指网络中存在一个中心节点与所有其他节点相连接，而其余节点之间不存在直接连接关系。为便于表达，我们后文直接以图示方式给出网络结构，而省略具体的数学表述。

② 值得注意的是，当网络外部性强度非常大（ $\gamma>1$ ）时，这一结论可能不再成立。此时度数较大的选民可能表现出更高的参与积极性，甚至度数相同的选民也可能表现出不同的投票参与率。这种情况的经济含义是，当网络外部性足够强时，投票博弈逐渐转变为一种类似协调博弈的情形，个体决策更依赖于整体网络结构与其他选民的行为。

相较于核心—边缘网络，星状网络中节点度数的差异更为显著，因而选民间的投票参与率差异也更为明显，并且这种差异随网络外部性强度的增加而进一步扩大。

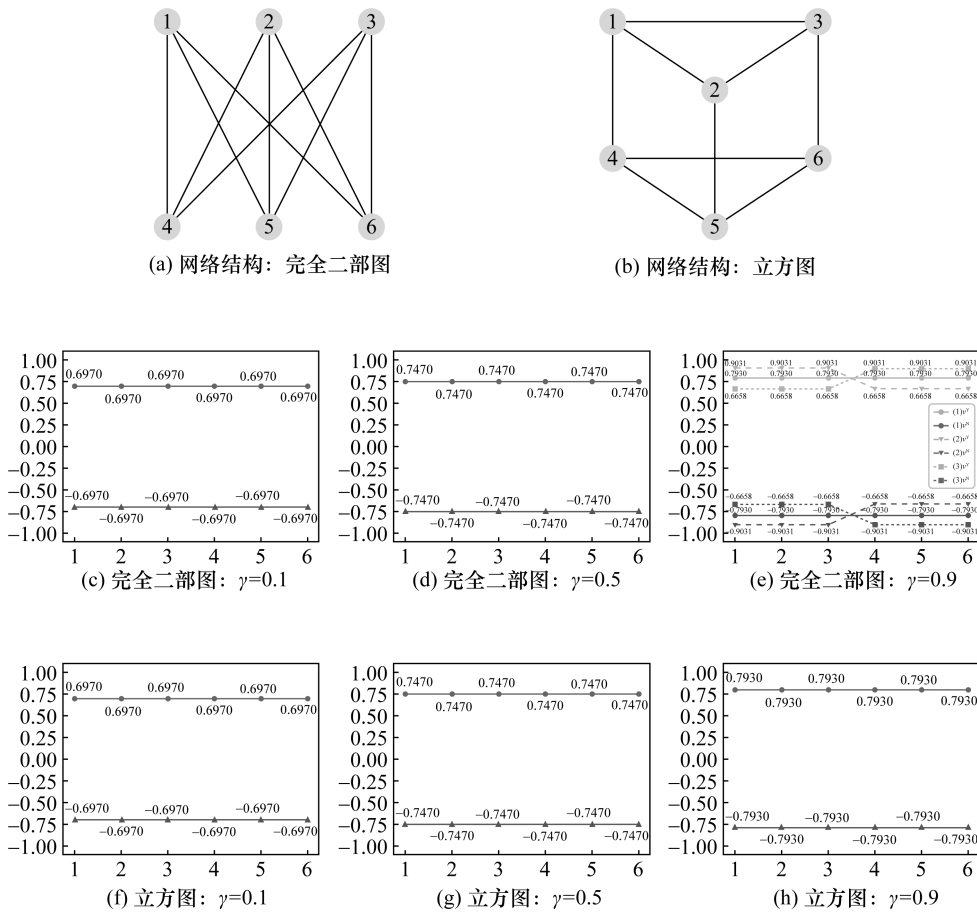
以上分析说明，网络结构与外部性强度共同作用显著影响了选民投票行为的均衡特征，对理解基层社会治理中不同网络结构下选民参与决策的异质性提供了有益的理论启示。

(二) 正则图的均衡

接下来，我们分析选民度数相同的正则图网络情形，具体考虑如下两种典型的正则图结构。

例 2（正则图的均衡特征）：假设选民的内在收益 v_i 定义在区间 $[-1, 1]$ 上，且具有概率密度函数 $f(x) = |x|$ 。共同度数设定为 $d=3$ ，网络外部性强度分别取 $\gamma=0.1$ 、 0.5 与 0.9 ：(a) 网络结构为完全二部图（如图 2（a）所示）；(b) 网络结构为立方图（如图 2（b）所示）。

图 2 正则图中的均衡



注：图 2 展示完全二部图和立方图两种正则图网络结构在不同网络外部性强度下的投票均衡特征。其中，图 2(a)一(b)分别为完全二部图与立方图的结构示意图；图 2(c)一(e)为完全二部图在网络外部性强度下的均衡阈值；图 2(f)一(h)为立方图在对应网络外部性强度下的均衡阈值。图中圆点线条表示各选民支持提案的阈值 v_i^Y ，三角线条表示各选民反对提案的阈值 v_i^N 。当同一网络与外部性强度下存在多个不同的均衡时，图中以虚、实线加以区分。

图 2 分别展示了完全二部图(例 2(a))和立方图(例 2(b))在上述参数设定下的均衡结果。具体分析得出如下两个观察结论：第一，如定理 2 所示，由于两个正则图网络中所有选民的度数均相同（均为 $d=3$ ），因此在任意给定网络外部性强度 γ 下，两种网络结构的对称均衡阈值完全相同。第二，当网络外部性强度相对较大时（例如 $\gamma=0.9$ ），尽管两个网络的度数相同，但其非对称均衡的阈值表现出明显差异。这说明非对称均衡不仅受到共同度数 d 的影响，更依赖于网络的具体拓扑结构。

上述数值模拟结果表明，即使在度数相同的正则图网络结构中，网络拓扑结构的差异也可能导致非对称均衡行为存在显著差别，从而为分析实际治理场景下投票行为差异提供了新的理论视角和政策启示。

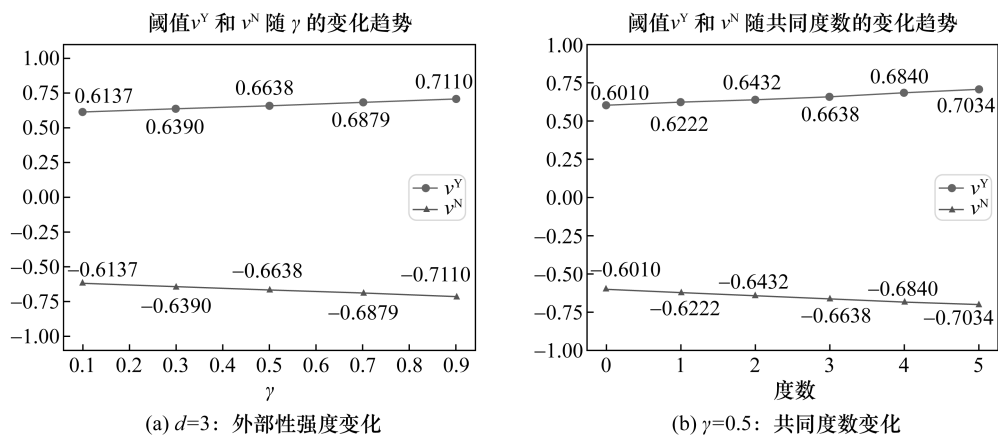
（三）正则图中对称均衡的比较静态

本部分进一步考察正则图中对称均衡在不同网络外部性强度 γ 与共同度数 d 下的变化规律。根据定理 2 及例 2 的结论，正则图中只要选民度数相同，则其对称均衡不依赖于具体的网络结构。因此，以下分析聚焦于 γ 和 d 的比较静态特性，略去对网络拓扑的具体描述。

例 3（正则图中对称均衡的比较静态）：假设选民的内在收益 v_i 服从 $[-1, 1]$ 上的均匀分布，考察如下两组比较静态：第一，固定共同度数 $d=3$ ，考察对称均衡下二阈值 (v^N, v^Y) 随网络外部性强度 γ 变化的比较静态。第二，固定网络外部性强度 $\gamma=0.5$ ，考察二阈值 (v^N, v^Y) 随共同度数 d 变化的比较静态。

图 3（a）对应于例 3（a），展示在固定度数 $d=3$ 下，二阈值 (v^N, v^Y) 随 γ 上升的变化趋势；图 3（b）对应于例 3（b），展示在固定度数 $\gamma=0.5$ 的情形下，二阈值随共同度数 d 的变化。数值模拟结果与注 3 第二条的分析一致：在正则图的对称均衡中，随着网络外部性强度 γ 的提高或共同度数 d 的增加，选民的参与度呈下降趋势，即弃权的概率上升。该结果对理解现实中投票参与度具有重要解释力。

图 3 正则图中对称均衡的比较静态



注：图 3 展示正则图中对称均衡二阈值的比较静态特征。图 3（a）显示在固定选民度数 $d=3$ 下，均衡阈值随网络外部性强度 γ 变化的趋势；图 3（b）显示在固定网络外部性强度 $\gamma=0.5$ 下，均衡阈值随选民共同度数 d 的变化趋势。图中圆点线条表示支持阈值 v^Y 的变化，三角线条表示反对阈值 v^N 的变化。

七、结论与政策含义

本文在标准的简单多数投票模型中引入网络外部性与投票成本，证明了投票均衡始终存在并具有清晰的“二阈值”策略结构。此外，我们揭示了网络结构显著影响均衡的对称性：仅在正则图网络中，才存在对称均衡。

本文的研究为未来研究提供了两方面的方向。首先，未来研究可针对一些具体常见的网络结构（如星状网络、核心—边缘网络、完全图、完全二部图等），给出投票均衡更明确的解析刻画与闭合解，并进一步明确这些结构下网络外部性强度影响均衡对称性与参与率的具体条件。其次，基于具体网络结构的明确均衡刻画，未来研究可以进一步分析投票参与率与社会最优之间的偏离，明确界定在哪些具体网络结构与外部性强度组合下，选民可能投票过多或过少，从而为现实中的投票机制设计提供更为精准的政策建议。

从政策实践的角度看，本文的研究对我国基层治理中广泛存在的社区议事与村庄民主决策具有现实启示。在以熟人社会为特征的基层治理环境中，个体的投票行为往往受到社会网络中邻居或亲友意见的显著影响，因此在制度设计中需充分考虑网络外部性的作用。在社会联系紧密、网络结构密集的社区或村庄，应当着力降低个体的投票成本，以鼓励有效参与、提升集体决策效率；而在联系较弱、结构松散的环境中，则须避免无效投票带来的资源浪费，防止“过度参与”所引发的效率损失。通过针对不同网络结构合理设计参与激励机制，有助于在我国推进全过程人民民主的过程中，更好地契合基层实际、提高民主决策的质量与执行力。

附录：数学证明

本节补充正文中略去的定理 1、引理 1 与引理 2 的数学证明。

定理 1 的证明：证明分为两步，第一步证明该投票博弈必存在贝叶斯纳什均衡；第二步证明在给定其他选民任意策略时，每位选民的最优反应必为二阈值策略。

步骤 1（均衡存在性）：本文所分析的投票博弈具有以下特征，选民集合为有限集，且每位选民的行动空间 B 也是有限的；选民的内在收益 v_i 定义于紧区间 $[v_i, \bar{v}_i] \subseteq \mathbb{R}$ 上，且相互独立；选民的收益函数 $u_i(\cdot)$ 关于内在收益向量 $\mathbf{v}$ 连续。因此，根据 Milgrom 和 Weber（1985，定理 1），上述不完全信息博弈必然存在贝叶斯纳什均衡。

步骤 2（二阈值策略的最优性）：固定其他选民的任意策略组合 $\sigma_{-i}(v_{-i})$ ，我们考察选民 i 的最优反应。记 $\mathbb{P}(X, \sigma_{-i}(v_{-i}))$ 为在其他选民策略给定的情形下，选民 i 采取行动 $X \in \{Y, N, A\}$ 时提案通过的概率。由于 v_j 之间独立，给定 v_i 时，选民 i 选择各行动的期望收益分别为^①：

$$\mathbb{E}[\pi_i(Y, \sigma_{-i}(v_{-i}); \mathbf{v}) | v_i] = \int_{v_{-i} \in \prod_{j \neq i} [v_j, \bar{v}_j]} \mathbb{P}(Y, \sigma_{-i}(v_{-i})) u_i(\mathbf{v}) dF_{-i}(v_{-i}) - c_i$$

① $\pi_i(X, \sigma_{-i}(v_{-i}); \mathbf{v})$ 表示在选民内在收益向量为 $\mathbf{v}$ 、其他选民采取策略组合 $\sigma_{-i}(v_{-i})$ 时，选民 i 选择行动 X 所获得的效用。

$$\mathbb{E} [\pi_i(N, \sigma_{-i}(v_{-i}); \mathbf{v}) | v_i] = \int_{v_{-i} \in \prod_{j \neq i} [v_j, \tilde{v}_j]} \mathbb{P}(N, \sigma_{-i}(v_{-i})) u_i(\mathbf{v}) dF_{-i}(v_{-i}) - c_i$$

$$\mathbb{E} [\pi_i(A, \sigma_{-i}(v_{-i}); \mathbf{v}) | v_i] = \int_{v_{-i} \in \prod_{j \neq i} [v_j, \tilde{v}_j]} \mathbb{P}(A, \sigma_{-i}(v_{-i})) u_i(\mathbf{v}) dF_{-i}(v_{-i})$$

进而定义以下集合：

$$S_i^Y = \{v \in [\underline{v}, \bar{v}] : \mathbb{E} [\pi_i(Y, \sigma_{-i}(v_{-i}); \mathbf{v}) | v_i] \geq \max_{X \in \{N, A\}} \mathbb{E} [\pi_i(X, \sigma_{-i}(v_{-i}); \mathbf{v}) | v_i]\}$$

$$S_i^N = \{v \in [\underline{v}, \bar{v}] : \mathbb{E} [\pi_i(N, \sigma_{-i}(v_{-i}); \mathbf{v}) | v_i] \geq \max_{X \in \{Y, A\}} \mathbb{E} [\pi_i(X, \sigma_{-i}(v_{-i}); \mathbf{v}) | v_i]\}$$

由于采用简单多数规则，任意给定 $\sigma_{-i}(v_{-i})$ 下，显然有：

$$\mathbb{P}(Y, \sigma_{-i}(v_{-i})) \geq \mathbb{P}(A, \sigma_{-i}(v_{-i})) \geq \mathbb{P}(N, \sigma_{-i}(v_{-i}))$$

结合 $u_i(\mathbf{v})$ 关于 v_i 严格单调递增的性质与严格正的投票成本 $c_i > 0$ ，对任意 $v_i > \sup S_i^Y$ ，有：

$$\mathbb{E} [\pi_i(Y, \sigma_{-i}(v_{-i}); \mathbf{v}) | v_i] > \max_{X \in \{N, A\}} \mathbb{E} [\pi_i(X, \sigma_{-i}(v_{-i}); \mathbf{v}) | v_i]$$

即此时选民 i 支持提案为唯一最优反应。同理，对于任意 $v_i < \sup S_i^N$ ，可推得反对提案为唯一最优反应。

由以上推导可知，必有 $\sup S_i^N \leq \inf S_i^Y$ 。^① 若 $\sup S_i^N < \inf S_i^Y$ ，则对任意 $\sup S_i^N \leq \inf S_i^Y$ ，弃权行动必严格优于支持或反对，因此为选民 i 的唯一最优反应。

综上所述，选民 j 的最优反应策略必可由两个阈值刻画，即 $v_i^N = \sup S_i^N$ 和 $v_i^Y = \inf S_i^Y$ ，且此二阈值策略为一般唯一的最优反应。

引理 1 的证明：设 (v^N, v^Y) 为任一对称二阈值均衡，由定理 1 的证明可知 $v^N \leq v^Y$ ，因此仅需证明 $v^N \neq v^Y$ 。采用反证法，假设 $v^N = v^Y = \tilde{v}$ 。

定义 $p_Y = \mathbb{P}(v_i \geq \tilde{v})$ ， $p_N = \mathbb{P}(v_i \leq \tilde{v})$ ， $p_A = \mathbb{P}(v_i = \tilde{v}) = 0$ 分别为选民在对称均衡中支持、反对和弃权的概率。由假设 $p_A = 0$ ，此时在均衡下弃权概率为 0。

考察选民 i 在临界收益 $v_i = \tilde{v}$ 时的激励。记 m_Y 和 m_N 分别为除选民 i 外其他选民选择支持和反对的人数。我们分奇偶两种情形进行讨论。

第一，选民总数 $m = 2k + 1$ 为奇数，其中 $k \in N_+$ 。此时，只有当其他选民的支持与反对票数相同时（即 $m_Y = m_N = k$ ），选民 i 的投票才会成为关键票。因此，选民 i 支持相较于弃权的边际收益为：

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [\pi_i(Y) | \tilde{v}] - \mathbb{E} [\pi_i(Y) | \tilde{v}] \\ &= \frac{1}{2} \binom{2k}{k} p_Y^k p_N^k \mathbb{E} \left[\tilde{v} + \sum_{j \in N(i)} v_j | (m_Y, m_N) = (k, k) \right] - c \\ &= \frac{1}{2} \binom{2k}{k} p_Y^k p_N^k (\tilde{v} + d_i \mathbb{E} [v_j | (m_Y, m_N) = (k, k)]) - c \end{aligned}$$

同理，选民 i 弃权相较于反对的边际收益为：

$$\mathbb{E} [\pi_i(A) | \tilde{v}] - \mathbb{E} [\pi_i(N) | \tilde{v}] = \frac{1}{2} \binom{2k}{k} p_Y^k p_N^k (\tilde{v} + d_i \mathbb{E} [v_j | (m_Y, m_N) = (k, k)]) + c$$

① 若 $\inf S_i^Y < \sup S_i^N$ ，则必有 $\inf S_i^Y < \frac{\inf S_i^Y + \sup S_i^N}{2} < \sup S_i^N$ ，从而对于 $v_i = \frac{\inf S_i^Y + \sup S_i^N}{2}$ ，支持与反对提案同时为唯一最优反应，显然矛盾。

而由临界内在收益 $\tilde{v}$ 的定义，必须同时满足：

$$\mathbb{E}[\pi_i(Y) | \tilde{v}] \geq \mathbb{E}[\pi_i(A) | \tilde{v}], \quad \mathbb{E}[\pi_i(N) | \tilde{v}] \geq \mathbb{E}[\pi_i(A) | \tilde{v}]$$

上述两个不等式意味着 $c \leq 0$ ，与投票成本严格大于 0 ($c > 0$) 矛盾。因此，此情形不可能出现 $v^N = v^Y$ 。

第二，选民总数 $m = 2k + 2$ 为偶数，其中 $k \in N_+$ 。此时，支持票只有在其他选民“反对票多一票”（即 $m_Y = k$ 且 $m_N = k + 1$ ）时才为关键票。因此，选民 i 支持相较于弃权的边际收益为：

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\pi_i(Y) | \tilde{v}] - \mathbb{E}[\pi_i(A) | \tilde{v}] \\ &= \frac{1}{2} \binom{2k+1}{k} p_Y^k p_N^{k+1} (\tilde{v} + d_i \mathbb{E}[v_j | (m_Y, m_N) = (k, k+1)]) - c \end{aligned}$$

而反对票只有在其他选民“支持票多一票”（即 $m_Y = k + 1$ 且 $m_N = k$ ）时才为关键票，选民 i 弃权相较于反对的边际收益为：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\pi_i(A) | \tilde{v}] - \mathbb{E}[\pi_i(N) | \tilde{v}] &= \frac{1}{2} \binom{2k+1}{k+1} p_Y^{k+1} p_N^k (\tilde{v} + d_i \mathbb{E}[v_j | (m_Y, m_N) \\ &= (k+1, k)]) + c \end{aligned}$$

注意到，在对称均衡下显然有：

$$\mathbb{E}[v_j | (m_Y, m_N) = (k+1, k)] > \mathbb{E}[v_j | (m_Y, m_N) = (k, k+1)]$$

给定 $c > 0$ ，不可能同时满足临界收益 $\tilde{v}$ 的定义条件：

$$\mathbb{E}[\pi_i(Y) | \tilde{v}] \geq \mathbb{E}[\pi_i(A) | \tilde{v}], \quad \mathbb{E}[\pi_i(N) | \tilde{v}] \geq \mathbb{E}[\pi_i(A) | \tilde{v}]$$

因此，该情形同样不能出现 $v^N = v^Y$ 。

综上所述，我们得出 $v^N < v^Y$ 必然成立。

定理 2 的证明分为三步：第一步证明若 G 不为正则图，则不存在对称均衡；第二步证明若 G 为正则图，则必存在对称均衡；第三步证明正则图中对称均衡的二阈值一定满足 $v^N + v^Y = 0$ 。

步骤 1（非正则图不存在对称均衡）：我们用反证法证明，假设非正则图 G 存在对称均衡 (v^N, v^Y) ，由非正则性定义，必存在选民 i 和 j 满足 $d_i \neq d_j$ 。我们对阈值之和分两种情形讨论：第一， $v^N + v^Y \leq 0$ ；第二， $v^N + v^Y \geq 0$ 。

首先考虑 $v^N + v^Y \leq 0$ 的情形。在假设 3（分布关于零点对称）下，此时阈值满足 $\underline{v} < v^N < v^Y \leq \bar{v}$ 。由于 v^Y 位于内点，因此当 $v_i = v^Y$ 时，选民 i 对支持与弃权无差异，即：

$$\mathbb{E}[\pi_i(Y) | v^Y] = \mathbb{E}[\pi_i(A) | v^Y]$$

类似地，当 $v_j = v^Y$ 时，选民 j 也满足上述无差异条件。记 p_Y 、 p_N 、 p_A 为均衡中任意选民分别选择支持、反对和弃权的概率，记 m_Y 、 m_N 、 m_A 为除特定选民外其他选民分别选择支持、反对和弃权的人数。则对 $d = d_i$ 或 d_j 均有：

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \binom{m-1}{l, l, m-1-2l} p_Y^l p_N^l p_A^{m-1-2l} (v^Y + d \mathbb{E}[v_k | (m_Y, m_N, m_A) = (l, l, m-1-2l)]) \\ &+ \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor} \binom{m-1}{l, l+1, m-2-2l} p_Y^l p_N^{l+1} p_A^{m-2-2l} (v^Y + d \mathbb{E}[v_k | (m_Y, m_N, m_A) \end{aligned} \quad (1)$$

$$= (l, l+1, m-2-2l)]) = 2c$$

为表达简洁, 引入记号:

$$\begin{aligned} X_1 &:= \sum_{l=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \binom{m-1}{l, l, m-1-2l} p_Y^l p_N^l p_A^{m-1-2l} \mathbb{E}[v_k | (m_Y, m_N, m_A)] \\ &= (l, l, m-1-2l)] \\ X_2 &:= \sum_{l=0}^{\left[\frac{m-2}{2}\right]} \binom{m-1}{l, l+1, m-2-2l} p_Y^l p_N^{l+1} p_A^{m-2-2l} \mathbb{E}[v_k | (m_Y, m_N, m_A)] \\ &= (l, l+1, m-2-2l)] \end{aligned}$$

由式 (1) 对 $d=d_i \neq d_j$ 均成立, 立刻推出:

$$X_1 + X_2 = 0$$

另一方面, 由 $v^N + v^Y \leq 0$ 与对称分布假设可知, 对所有可能 l 的有:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[v_k | (m_Y, m_N, m_A) = (l, l+1, m-2-2l)] &< \mathbb{E}[v_k | (m_Y, m_N, m_A) \\ &= (l, l, m-1-2l)] \leq 0 \end{aligned}$$

因此必有 $X_1 + X_2 < 0$, 与上式矛盾, 故 $v^N + v^Y \leq 0$ 情形不可能成立。

再考虑 $v^N + v^Y \geq 0$ 的情形。由假设 3, 此时阈值满足 $\underline{v} < v^N < v^Y \leq \bar{v}$ 。类似前述, 当 $v_i = v^N$ 时选民 i 对反对与弃权无差异, 当 $v_j = v^N$ 时选民 j 亦然。因此对 $d=d_i$ 或 d_j 均有:

$$\begin{aligned} &\sum_{l=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \binom{m-1}{l, l, m-1-2l} p_Y^l p_N^l p_A^{m-1-2l} (v^N + d \mathbb{E}[v_k | (m_Y, m_N, m_A) \\ &= (l, l, m-1-2l)]) + \sum_{l=0}^{\left[\frac{m-2}{2}\right]} \binom{m-1}{l+1, l, m-2-2l} \\ &\times p_Y^{l+1} p_N^l p_A^{m-2-2l} (v^N + d \mathbb{E}[v_k | (m_Y, m_N, m_A) \\ &= (l+1, l, m-2-2l)]) = -2c \end{aligned} \quad (2)$$

引入额外记号:

$$\begin{aligned} X_3 &= \sum_{l=0}^{\left[\frac{m-2}{2}\right]} \binom{m-1}{l+1, l, m-2-2l} p_Y^{l+1} p_N^l p_A^{m-2-2l} \mathbb{E}[v_k | (m_Y, m_N, m_A) \\ &= (l+1, l, m-2-2l)] \end{aligned}$$

同理, 由式 (2) 对 $d=d_i \neq d_j$ 同时成立, 我们得到:

$$X_1 + X_3 = 0$$

另一方面, 考虑到 $v^N + v^Y \geq 0$ 且内在收益分布关于零对称, 则对所有可能的 l 均满足:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[v_k | (m_Y, m_N, m_A) = (l+1, l, m-2-2l)] \\ > \mathbb{E}[v_k | (m_Y, m_N, m_A) = (l, l, m-1-2l)] \geq 0 \end{aligned}$$

因此, 必然有 $X_1 + X_3 > 0$, 与上式矛盾, 故 $v^N + v^Y \geq 0$ 的情形亦不可成立。

综上所述, 两种情形均推出矛盾, 故原假设不成立。我们得出结论: 非正则图中不存在对称均衡。

步骤 2 (正则图必存在对称均衡): 为了便于分析, 我们考虑 Milgrom 与 Weber

(1985) 定义的分佈策略 (distributional strategy)^①:

$$\mu_i: [\underline{v}, \bar{v}] \times B \rightarrow [0, 1)$$

注意到: 选民集合为有限集, 每位选民的行动空间 B 也是有限集; 选民内在收益 v_i 定义于紧区间 $[\underline{v}, \bar{v}] \subseteq \mathbb{R}$ 上且相互独立; 每位选民的收益函数 $u_i(\cdot)$ 关于内在收益向量 $\mathbf{v}$ 连续。依据 Milgrom 与 Weber (1985, 定理 1) 的证明, 当分佈策略空间 μ_i 赋予弱收敛拓扑时, 各选民的策略集为紧致、凸的度量空间 (compact, convex metric spaces), 收益函数连续且为线性函数。特别地, 收益函数连续的博弈显然满足 Reny (1999) 所定义的“对角收益安全性” (diagonally payoff secure)^②。

此外, 虽然所研究的投票博弈并非完全对称 (因网络结构可能不对称), 但在正则图情形下所有选民度数相同 (即 $d_i = d$), 博弈满足 Reny (1999) 的“拟对称性” (quasi-symmetry) 条件^③。

根据 Reny (1999) 推论 4.3, 该博弈必存在 (纯策略) 对称均衡。再结合定理 1 所述任何投票博弈的均衡策略结构, 立刻可知: 此投票博弈在正则图情形下必存在对称二閾值策略均衡。

步骤 3 (正则图中对称均衡必满足 $v^N + v^Y = 0$): 根据步骤 2, 正则图 G 中必然存在对称二閾值均衡 (v^N, v^Y)。下述证明仅需排除 $v^N + v^Y < 0$ 与 $v^N + v^Y > 0$ 这两种情形。

采用反证法。首先考虑 $v^N + v^Y < 0$ 情形。由步骤 1 的分析可知, 此时式 (1) 必然成立, 而式 (2) 则未必成立, 但一定满足不等式 (2) ≥ 0 。定义以下符号以简化表达:

$$\begin{aligned} Z_{1,l} &= \binom{m-1}{l, l, m-1-2l} p_Y^l p_N^l p_A^{m-1-2l} (v^Y + d\mathbb{E}[v_k | (m_Y, m_N, m_A)]) \\ &= (l, l, m-1-2l) \\ Z_{2,l} &= \binom{m-1}{l, l+1, m-2-2l} p_Y^l p_N^{l+1} p_A^{m-2-2l} (v^Y + d\mathbb{E}[v_k | (m_Y, m_N, m_A)]) \\ &= (l, l+1, m-2-2l) \\ Z_{3,l} &= \binom{m-1}{l, l, m-1-2l} p_Y^l p_N^l p_A^{m-1-2l} (v^N + d\mathbb{E}[v_k | (m_Y, m_N, m_A)]) \\ &= (l, l, m-1-2l) \\ Z_{4,l} &= \binom{m-1}{l+1, l, m-2-2l} p_Y^{l+1} p_N^l p_A^{m-2-2l} (v^N + d\mathbb{E}[v_k | (m_Y, m_N, m_A)]) \\ &= (l+1, l, m-2-2l) \end{aligned}$$

① 分佈策略 $\mu_i(\cdot)$ 与行为策略 $\sigma_i(\cdot)$ 之间的关系为: 对任意 $v_i \in [\underline{v}, \bar{v}]$ 及任意行动集合 $B_0 \subseteq B$, 有 $\sigma_0(B_0, v_i) = \mu_i(B_0 | v_i)$ 。

② 根据 Reny (1999), 对角收益安全性的定义为: 对于任意 $\varepsilon > 0$ 和任意对称策略 μ , 存在某一选民 i 的策略 μ_i 及某一常数 $\delta > 0$, 使得对其他选民任意落入对称策略组合 $(\mu, \mu, \dots, \mu)$ 之 δ 邻域内的策略组合 $\mu-i$, 均满足 $\pi_i(\mu_i, \mu-i) > \pi_i(\mu_i, \mu, \dots, \mu) - \varepsilon$ 。

③ 根据 Reny (1999) 定义, 拟对称性是指: 对于任意两个选民 i, j , 任意策略 μ' 以及共同的对称策略 μ , 必有 $\pi_i(\mu', \mu, \dots, \mu) = \pi_j(\mu', \mu, \dots, \mu)$ 。换言之, 当所有其他参与者采用同一对称策略时, 每位参与人的收益相同。

再由条件期望的定义可得：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[v_k | (m_Y, m_N, m_A)] &= \frac{m_Y}{m_Y + m_N + m_A} \mathbb{E}[v_k | v_k \geq v^Y] \\ &\quad + \frac{m_N}{m_Y + m_N + m_A} \mathbb{E}[v_k | v_k \leq v^N] \\ &\quad + \frac{m_A}{m_Y + m_N + m_A} \mathbb{E}[v_k | v^N < v_k < v^Y]\end{aligned}$$

由于假设 $v^N + v^Y < 0$ ，并且内在收益分布 F 关于零点对称（假设3），易验证：

$$\mathbb{E}[v_k | v_k \geq v^Y] + \mathbb{E}[v_k | v_k \leq v^N] < 0, \quad \mathbb{E}[v_k | v^N < v_k < v^Y] < 0$$

因此，对所有可能的 l 均有：

$$Z_{1,l} + Z_{3,l} < \left[\frac{(m-2)!}{l! l! (m-2-2l)!} \times p_Y^l p_N^l p_A^{m-2-2l} \times d \right] p_A \mathbb{E}[v_k | v^N < v_k < v^Y] < 0 \quad (3)$$

此外， $v^N + v^Y < 0$ 与分布对称性意味着 $p_N < p_Y$ ，故对所有可能的 l 均满足：

$$p_N \mathbb{E}[v_k | v \geq v^Y] + p_Y \mathbb{E}[v_k | v \leq v^N] < 0$$

进而得出：

$$\begin{aligned}Z_{2,l} + Z_{4,l} &< \left[\frac{(m-2)!}{l! l! (m-2-2l)!} \times p_Y^l p_N^l p_A^{m-2-2l} \times d \right] (p_Y \mathbb{E}[v_k | v_k \geq v^Y] \\ &\quad + p_N \mathbb{E}[v_k | v_k \leq v^N])\end{aligned} \quad (4)$$

由条件期望性质可知：

$$p_Y \mathbb{E}[v_k | v_k \geq v^Y] + p_A \mathbb{E}[v_k | v^N < v_k < v^Y] + p_N \mathbb{E}[v_k | v_k \leq v^N] = 0$$

结合不等式（3）和不等式（4），则对所有可能的 l ：

$$Z_{1,l} + Z_{2,l} + Z_{3,l} + Z_{4,l} < 0$$

而由等式（1）与不等式（2）可知，必然满足 $(1)+(2) \geq 0$ ，这与上述推导出的不等式矛盾。^① 因此，我们排除了 $v^N + v^Y < 0$ 这一情形。

类似地，假设存在 $v^N + v^Y > 0$ 的对称均衡，则可采用完全平行的推导得出类似的矛盾（此时不等式方向恰好相反，最终导致与 $(1)+(2) \leq 0$ 的矛盾）。

综上所述，我们得出结论：在正则图中，任意对称二阈值均衡必然满足 $v^N + v^Y = 0$ 。

参考文献：

1. Börgers, T., 2004, “Costly Voting” [J], *American Economic Review*, Vol. 94, No. 1: 57-66.
2. Dasgupta, S., Randazzo, K. A., Sheehan, R. S., Williams, K. C., 2008, “Coordinated Voting in Sequential and Simultaneous Elections: Some Experimental Evidence” [J], *Experimental Economics*, Vol. 11: 315-335.

① 当选民人数 m 为奇数时， $Z_{1,l}$, $Z_{3,l}$ 项的数量会比 $Z_{2,l}$, $Z_{4,l}$ 多一项，但额外增加的这项仍满足 $Z_{1,l} + Z_{3,l} < 0$ ，因此不影响上述矛盾的成立。

3. Fainmesser, I. P. , Galeotti, A. , 2016, “Pricing Network Effects” [J] , *The Review of Economic Studies* , Vol. 83, No. 1: 165-198.
4. Farrell, J. , Saloner, G. , 1985, “Standardization, Compatibility, and Innovation” [J] , *RAND Journal of Economics* , Vol. 16, No. 1: 70-83.
5. Feddersen, T. J. , Pesendorfer, W. , 1996, “The Swing Voter’s Curse” [J] , *American Economic Review* , Vol. 86, No. 3: 408-424.
6. Feddersen, T. J. , Pesendorfer, W. , 1997, “Voting Behavior and Information Aggregation in Elections with Private Information” [J] , *Econometrica* , Vol. 65, No. 5: 1029-1058.
7. Feddersen, T. J. , Sandroni, A. , 2006, “A Theory of Participation in Elections” [J] , *American Economic Review* , Vol. 96, No. 4: 1271-1282.
8. Gerber, E. R. , Lewis, J. B. , 2004, “Beyond the Median: Voter Preferences, District Heterogeneity, and Political Representation” [J] , *Journal of Political Economy* , Vol. 112, No. 6: 1364-1383.
9. Gershkov, A. , Kleiner, A. , Moldovanu, B. , Shi, X. , 2023, “Voting with Interdependent Values: The Condorcet Winner” [J] , *Games and Economic Behavior* , Vol. 142: 193-208.
10. Ghosal, S. , Lockwood, B. , 2009, “Costly Voting When Both Information and Preferences Differ: Is Turn-out Too High or Too Low” [J] , *Social Choice and Welfare* , Vol. 33, No. 1: 25-50.
11. Grüner, H. R. , Tröger, T. , 2019, “Linear Voting Rules” [J] , *Econometrica* , Vol. 87, No. 6: 2037-2077.
12. Jackson, M. O. , 2008, *Social and Economic Networks* [M] , Princeton University Press.
13. Jehiel, P. , Moldovanu, B. , 2001, “Efficient Design with Interdependent Values” [J] , *Econometrica* , Vol. 69, No. 5: 1237-1259.
14. Katz, M. L. , Shapiro, C. , 1985, “Network Externalities, Competition, and Compatibility” [J] , *American Economic Review* , Vol. 75, No. 3: 424-440.
15. Matsusaka, J. G. , 2005, “Direct Democracy Works” [J] , *Journal of Economic Perspectives* , Vol. 19, No. 2: 185-206.
16. Milgrom, P. R. , Weber, R. J. , 1985, “Distributional Strategies for Games with Incomplete Information” [J] , *Mathematics of Operations Research* , Vol. 10, No. 4: 619-632.
17. Osborne, M. J. , Rubinstein, A. , 1994, *A Course in Game Theory* [M] , The MIT Press.
18. Palfrey, T. R. , Rosenthal, H. , 1983, “A Strategic Calculus of Voting” [J] , *Public Choice* , Vol. 41, No. 1: 7-53.
19. Reny, P. J. , 1999, “On the Existence of Pure and Mixed Strategy Nash Equilibria in Discontinuous Games” [J] , *Econometrica* , Vol. 67, No. 5: 1029-1056.
20. Tarski, A. , 1955, “A Lattice-Theoretical Fix Point Theorem and Its Applications” [J] , *Pacific Journal of Mathematics* , Vol. 5, No. 2: 285-309.

Equilibrium Analysis of Simple Majority Voting under Network Externalities

Ye Haoyang¹, Huang Jingyang², Shi Fanqi³

(1. School of Computer Science, Peking University)

(2. School of Mathematical Sciences, Peking University)

(3. School of Economics, Peking University)

Abstract: In practice, voting often involves participation costs, and voters' decisions are determined not only by their private interests but also by others' values within their social networks. This paper investigates the equilibrium characteristics of simple majority voting in a general model featuring costly voting and interdependent values. First, this paper proves the existence of voting equilibria and characterizes the two-threshold strategy structure adopted by voters in any equilibrium. Second, under the assumptions of linear network externalities and symmetric expected pay-offs, this paper examines how network structure affects voting equilibria. The theoretical analysis reveals that if the social network is an irregular graph, only asymmetric equilibria exist. In contrast, symmetric equilibria always exist in regular graphs and are unique when network externalities are relatively weak. Numerical simulations further show that voters' participation rates (i. e., the probabilities of voting rather than abstaining) decrease with increasing strength of network externalities or greater network connectivity.

Keywords: network externalities; simple majority voting; voting cost; two-threshold strategy; symmetric equilibrium

JEL Classification: D72; D82; D85